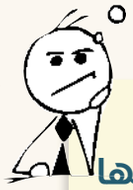
تكامل الدوال الاسية و اللوغارتمية :

الدالة الأسية

د(س) = هـ^س^٣



تذكر الاستقاق الاول

دَ(س) = ٣هـ^س^٣

= الدالة نفسها × مشتقة أسها

∫ هـ^س^٢ دس = ١/٢ هـ^س^٢ + ث

= الدالة نفسها / مشتقة أسها

∫ ٢^س^٣ دس = ٢^س^٣ / ٣ لو_هـ ٢ + ث = ١/٣ × ٢^س^٣ لو_هـ ٢ + ث

= الدالة نفسها / مشتقة أسها لو_هـ ٢

طيب لو الأس من درجة غير الأولي

■ ∫ ٦س هـ^س^٣ دس = ٦س هـ^س^٣ / ٦س + ث = هـ^س^٣ + ث

■ ∫ س^٢ هـ^٥س^٣ دس = ١/١٥ ∫ ١٥س^٢ هـ^٥س^٣ دس = ١/١٥ هـ^٥س^٣ + ث

تكامل يتضمن الدالة اللوغارتمية :

∫ ١/س دس = لو_هـ |س| + ث

∫ مشتقتها / الدالة دس = لو_هـ |الدالة| + ث

∫ (٢س + ٦) / (س^٢ + ٦س) دس = لو_هـ |س^٢ + ٦س| + ث

∫ (س + ٣) / (س^٢ + ٦س) دس = ١/٢ ∫ (٢س + ٦) / (س^٢ + ٦س) دس = ١/٢ لو_هـ |س^٢ + ٦س| + ث

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س منحني ميل المماس له عند أي نقطة يساوي $\frac{٣س + ٢}{س}$ ،
أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة $(هـ ، ٣هـ + ٥)$

الحل

$$\frac{وص}{وس} = \frac{٣س + ٢}{س}$$

$$ص = \int \frac{٣س + ٢}{س} وس = \int ٣ + \frac{٢}{س} وس$$

$$ص = ٣س + ٢ لو_{هـ} |س| + ت$$

$$٣هـ + ٥ = ٣هـ + ٢ + ت$$

$$ت = ٣$$

$$\therefore ص = ٣س + ٢ لو_{هـ} |س| + ٣$$

طرق التكامل
- التعويض
- التجزئ

تذكر يا صديقي

$$\int ١٠س (٥س^{٢} + ٤)^{٣} وس$$

القوس من الدرجة الثانية ومضروب في مشتقة ما بداخلة

$$\therefore \int ١٠س (٥س^{٢} + ٤)^{٣} وس = \frac{١}{٤} (٥س^{٢} + ٤)^{٤} + ت$$

تفاضلي الدالة

$ص = د(س)$	$وص = د'(س) وس$
$ص = ٥س^{٢}$	$وص = ١٠س وس$
$ص = ٢س^{٣}$	$وص = ٦س^{٢} وس$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س $\int س^{٢}(س-١)^{٥}\,وس$

الحل

$ع = س - ١$
$س = ع + ١$
$وس = وع$

$\therefore \int س^{٢}(س-١)^{٥}\,وس$
$= \int (ع+١)^{٢}ع^{٥}\,وع$
$= \int ع^{٥}(ع^{٢}+٢ع+١)\,وع$
$= \int ع^{٧}+٢ع^{٦}+ع^{٥}\,وع = \frac{١}{٨}ع^{٨}+\frac{٢}{٧}ع^{٧}+\frac{١}{٦}ع^{٦}+ث$
$= \frac{١}{٨}(س-١)^{٨}+\frac{٢}{٧}(س-١)^{٧}+\frac{١}{٦}(س-١)^{٦}+ث$

س $\int س^{٣}(س^{٢}+١)^{٥}\,وس$

الحل

$ع = س^{٢}+١$
$س^{٢} = ع - ١$
$٢س\,وس = وع$
$س\,وس = \frac{١}{٢}\,وع$

$\therefore \int س^{٣}(س^{٢}+١)^{٥}\,وس$
$= \int س^{٢}(س^{٢}+١)^{٥}\,س\,وس$
$= \int (ع-١)(ع^{٥}) \times \frac{١}{٢}\,وع$
$= \frac{١}{٢}\int ع^{٦}-ع^{٥}\,وع$
$= \frac{١}{٢}[\frac{١}{٧}ع^{٧}-\frac{١}{٦}ع^{٦}]+ث$
$= \frac{١}{١٤}ع^{٧}-\frac{١}{١٢}ع^{٦}+ث$
$= \frac{١}{١٤}(س^{٢}+١)^{٧}-\frac{١}{١٢}(س^{٢}+١)^{٦}+ث$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التكامل بالتجزئ

كثيرة الحدود	هـ	لو
تفاضل	تكامل	دائما تفاضل

$$\int \text{لو}_{هـ} \text{س} \, \text{د س} = \text{س لو}_{هـ} \text{س} - \int \frac{1}{\text{س}} \, \text{د س}$$
$$= \text{س لو}_{هـ} \text{س} - \text{س} + \text{ث}$$

تفاضل	تكامل
لو$_{هـ}$ س	١
$\frac{1}{\text{س}}$	س

$$\int \text{س}^{٢} \text{لو}_{هـ} \text{س} \, \text{د س} = \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} \text{لو}_{هـ} \text{س} - \frac{١}{٣} \int \text{س}^{٣} \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{د س}$$
$$= \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} \text{لو}_{هـ} \text{س} - \frac{١}{٣} \int \text{س}^{٢} \, \text{د س}$$
$$= \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} \text{لو}_{هـ} \text{س} - \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \text{ث}$$
$$= \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} \text{لو}_{هـ} \text{س} - \frac{١}{٩} \text{س}^{٣} + \text{ث}$$

تفاضل	تكامل
لو$_{هـ}$ س	س^{٢}
$\frac{1}{\text{س}}$	$\frac{١}{٣}$ س^{٣}

خلي بالك

$$\int \frac{1}{\text{س}} \text{لو}_{هـ} \text{س} \, \text{د س} = \frac{١}{٢} [\text{لو}_{هـ} \text{س}]^{٢} + \text{ث}$$

$$\int \text{س}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{د س} = \text{س}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{د س}$$
$$= \text{س}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} + ٢ \, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$$
$$= \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٢) + \text{ث}$$

تفاضل	تكامل
س^{٢}	هـ$^{\text{س}}$
٢س	هـ$^{\text{س}}$

تفاضل	تكامل
٢س	هـ$^{\text{س}}$
٢	هـ$^{\text{س}}$

$$٢\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢ \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{د س}$$
$$٢\text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}} - ٢ \, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$$

ممكن احل يعود التكامل

س^{٢}	+ هـ$^{\text{س}}$
٢س	− هـ$^{\text{س}}$
٢	+ هـ$^{\text{س}}$
٠	هـ$^{\text{س}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

$\int س^{3} هـ^{س^{2}}$ و س ← **هعمل تعديل**

$\int س^{2} س هـ^{س^{2}}$ و س

$= \frac{1}{2} س^{2} هـ^{س^{2}} - \int \frac{1}{2} 2 س هـ^{س^{2}}$ و س

$= \frac{1}{2} س^{2} هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2} هـ^{س^{2}} + ث$

تفاضل	تكامل
$س^{2}$	$(\frac{1}{2} \times 2) س هـ^{س^{2}}$
$2س$	$\frac{1}{2} هـ^{س^{2}}$

لاحظ الفرق

$\int \frac{1}{س لو_{هـ} س}$ و س

$= \int \frac{\frac{1}{س}}{لو_{هـ} س}$ و س

$= \int لو | لو_{هـ} س | + ث$

$\int \frac{لو_{هـ} س}{س}$ و س

$= \int \frac{1}{س} لو_{هـ} س$ و س

$= \frac{1}{2} [لو_{هـ} س]^{2} + ث$

$\int س لو_{هـ} س$ و س

$= \frac{1}{2} س^{2} لو_{هـ} س - \frac{1}{2} \int س$ و س

$= \frac{1}{2} س^{2} لو_{هـ} س - \frac{1}{4} س^{2} + ث$

تفاضل	تكامل
لو$_{هـ}$ س	س
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{2} س^{2}$

تكامل الدوال المثلثية

$\int$ جا س و س $= -$ جتا س $+ ث$

$\int$ قا^{2} س و س $=$ ظا س $+ ث$

$\int$ قا س ظا س و س $=$ قا س $+ ث$

$\int$ جتا س و س $=$ جا س $+ ث$

$\int$ قتا^{2} س و س $= -$ ظتا س $+ ث$

$\int$ قتا س ظتا س و س $= -$ قتا س $+ ث$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

لاحظ

$\int$ ظاس وس $= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ وس $= -\int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ وس $= -$ لو$_{\text{هـ}}$ | جتاس | + ث

$=$ لو$_{\text{هـ}}$ | قاس | + ث

بالمثل $\int$ ظتاس وس $= -$ لو$_{\text{هـ}}$ | قتاس | + ث

$\int$ قاس وس $= \int \frac{\text{قاس (قاس + ظاس)}}{\text{قاس + ظاس}}$ وس $=$ لو$_{\text{هـ}}$ | قاس + ظاس | + ث

بالمثل $\int$ قتاس وس $= -$ لو$_{\text{هـ}}$ | قتاس + ظتاس | + ث

التكامل المحدد

$$\int_{٢}^{٣} (س^{٢} + ٥س)\,وس = \left[\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} \times ٢٧ + \frac{٥}{٢} \times ٩\right) - \left(\frac{١}{٣} \times ٨ + \frac{٥}{٢} \times ٤\right) = \frac{١١٣}{٦}$$

الخواص

١) $\int_{ب}^{أ} د(س)\,وس = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس$

$\int_{٢}^{٥} د(س)\,وس = ١٠$ فإن $\int_{٥}^{٢} د(س)\,وس = -١٠$

٢) $\int_{أ}^{أ} د(س)\,وس =$ صفر $\Leftarrow \int_{٥}^{٥} د(س)\,وس =$ صفر

٣) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس = \int_{أ}^{حـ} د(س)\,وس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\,وس$

حيث: حـ $\in$]أ ، ب[

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مثال

$\int_{1}^{5} د(س)\,وس = ٨$ ، $\int_{5}^{1} ر(س)\,وس = ٣$

فإن $\int_{1}^{5} [٣د(س) + ٢ر(س) - ٢]\,وس = ...$

الحل

$٣\int_{1}^{5} د(س) + ٢\int_{1}^{5} ر(س) - [٢س]_{1}^{5} =$

$٣ \times ٨ + ٢ \times -٣ - [٢ \times ٥) - (٢ \times ١)] = ١٠$

مثال

$\int_{0}^{٦} |س - ٤|\,وس$

الحل

$|س - ٤| \begin{cases} س - ٤ & س \geq ٤ \\ ٤ - س & س < ٤ \end{cases}$

$\int_{0}^{٤} (٤ - س)\,وس + \int_{٤}^{٦} (س - ٤)\,وس = ١٠$

مثال

$\int_{-٢}^{٤} |س^{٢} - ٣س|\,وس$

الحل

$س^{٢} - ٣س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

	٤		٣		صفر		-٢
$س^{٢} - ٣س$	+ + +		- - - -		+ + +		

$\int_{-٢}^{٠} (س^{٢} - ٣س)\,وس + \int_{٠}^{٣} (٣س - س^{٢})\,وس + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٣س)\,وس = ١٥$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خواص الدوال الزوجية و الفردية

$$\int_{-ب}^{ب} د(س)\,وس \leftarrow \begin{cases} د(س) \text{ زوجية} = ٢ \int_{٠}^{ب} د(س)\,وس \\ د(س) \text{ فردية} = \text{صفر} \end{cases}$$

زوجية

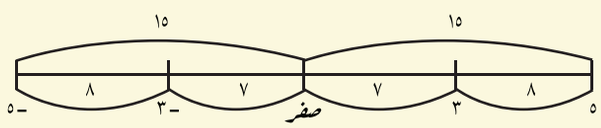
$$\int_{-٥}^{٥} د(س)\,وس = ٣٠$$

فردية

$$\int_{-٥}^{٥} د(س)\,وس = \text{صفر}$$

خلى بالك

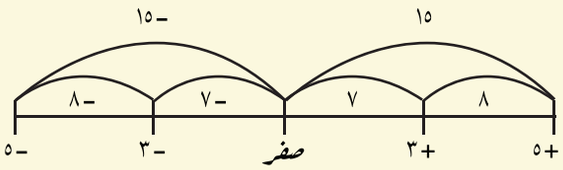
في الدالة الزوجية



$$\int_{٣}^{٥} د(س)\,وس = ٨ \quad \text{فإن} \int_{-٥}^{-٣} د(س)\,وس = ٨$$

$$\text{ومنها} \int_{ب}^{ن} د(س)\,وس = \int_{-ن}^{-ب} د(س)\,وس$$

في الدالة الفردية



$$\int_{٣}^{٥} د(س)\,وس = ٨ \quad \text{فإن} \int_{-٥}^{-٣} د(س)\,وس = -٨$$

$$\text{ومنها} \int_{ب}^{ن} د(س)\,وس = -\int_{-ن}^{-ب} د(س)\,وس$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

$$\int_{-٣}^{٣} \frac{س^{٥} + جاس}{س^{٢} + ١} \, وس = صفر$$

لانها دالة فردية

- زوجية ± زوجية = زوجية
- فردية ± فردية = فردية
- فردية ± زوجية =ليست زوجية وليست فردية
- فردية × فردية = زوجية
- زوجية × زوجية = زوجية
- زوجية × فردية = فردية

وكذلك القسمة

جا، قتا، ظا، ظتا ← فردية

جتا، قا ← زوجية

مثال

إذا كانت د دالة زوجية متصلة علي الفتره [ـ ٥ ، ٥]

$\int_{-٥}^{٥} د(س)\,وس = ٣٠$ $\int_{٠}^{٣} د(س)\,وس = ٩$ أوجد : $\int_{-٥}^{٣} د(س)\,وس$

الحل

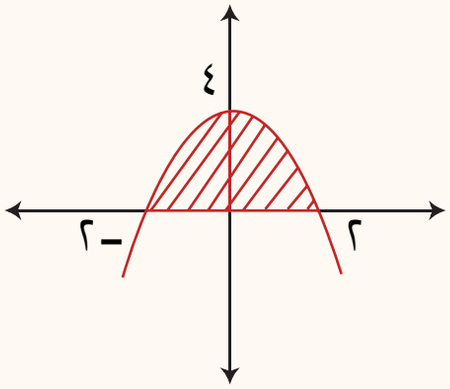
$$\therefore \int_{-٥}^{-٣} د(س)\,وس = ٦$$

$$\int_{-٣}^{-٥} د(س)\,وس = -٦$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المساحات في المستوي

د(س) = ٤ − س^{٢}



مساحة الجزء المظلل

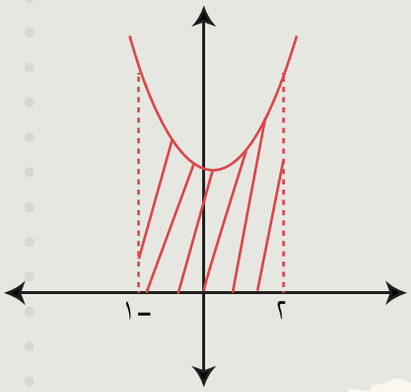
$$\int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢}) \, وس = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني د(س) = س^{٢} + ٤
ومحور السينات و المستقيمين س = − ١ ، س = ٢

الحل

$$\int_{-١}^{٢} س^{٢} + ٤ \, وس = ١٥$$



س٣ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني ص = س^{٢} − ٤س ومحور السينات

الحل

س^{٣} − ٤س = ٠
س (س^{٢} − ٤) = ٠
س = ٠ ، س^{٢} = ٤
س = ± ٢

المساحة =

$$\left| \int_{-٢}^{٠} س^{٢} - ٤س \, وس \right| + \left| \int_{٠}^{٢} س^{٢} - ٤س \, وس \right|$$

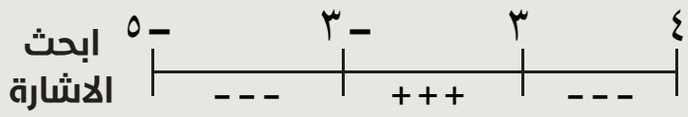
= ١٦

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

س أوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالة ص = ٩ − س^{٢}
والمستقيم ص = ٠ ، س = − ٥ ، س = ٤ تقع أسفل محور السينات

الحل

٩ − س^{٢} = ٠
س^{٢} = ٩
س = ± ٣



المساحة = $\int_{-٥}^{-٣}$ ٩ − س^{٢} ﻫ س + $\int_{٣}^{٤}$ ٩ − س^{٢} ﻫ س

$\frac{٤٤}{٣} + \frac{١٠}{٣} = \frac{٥٤}{٣}$ = ١٨ وحدة مربعة

س بإستخدام المساحة تحت منحني الدالة ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ أوجد $\int_{٠}^{٤}$ $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ﻫ س

الحل

بتربيع الطرفين ص^{٢} = ١٦ − س^{٢}

ص^{٢} + س^{٢} = ١٦ ← معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٤ وحدة مربعة

∴ المطلوب هو مساحة ربع دائرة

المساحة = $\frac{١}{٤}$ × π ن^{٢} = $\frac{١}{٤}$ × π × ١٦ = ٤ π وحدة مساحة

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الحجـــــوم

حجم المجسم حول محور السينات

$$\text{الحجم} = \pi \int_{س_1}^{س_2} ص^2 \, وس$$

س أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^2 + 2$ ومحور السينات والمستقيمين $س = -2$ ، $س = 2$ دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

$$\text{الحجم} = \pi \int_{-2}^{2} (س^2 + 2)^2 \, وس = \frac{40}{3} \pi \text{ وحدة حجم}$$

س أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = \sqrt{س + 4}$ ومحوري الإحداثيات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل

$$ص = 0 \Leftarrow \sqrt{س + 4} \Leftarrow س + 4 = 0 \Leftarrow س = -4$$

$$\text{الحجم} = \pi \int_{-4}^{0} (س + 4) \, وس = 8 \pi \text{ وحدة حجم}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK